

Fermioni in Astrofisica

Costantino Sigismondi, ICRA International Center for Relativistic Astrophysics

sigismondi@icra.it

Abstract:

The role played by Fermions in Astrophysics is primary in Cosmology dealing with large scale structure formation and in Relativistic Astrophysics, with white dwarfs and neutron stars. An introductory approach to Fermions in the expanding Universe is presented for didactic purposes. The phase space structure is sketched, and the distinction between weak gravitational field and strong gravitational field is made in order to make some evaluations about Fermi energy of the systems.

1. Introduzione:

Il ruolo che la statistica microscopica, ovvero che le particelle siano classiche o quantistiche, ha in astrofisica molta più rilevanza di quanto si possa immaginare. Sappiamo infatti che quando il numero di particelle è molto grande, il comportamento di un sistema quantistico, a causa del teorema di Ehrenfest, tende al risultato classico newtoniano. Tuttavia nel caso di Fermioni, anche a livello macroscopico, resta una grossa differenza con le previsioni classiche: basti pensare ai metalli, per i quali l'energia di Fermi del sistema è molto superiore alla temperatura ambiente.

Corpi come le stelle nane bianche e le stelle di neutroni, sono sottoposti a campi gravitazionali molto intensi che vengono sostenuti proprio dalla loro energia di Fermi.

D'altro canto è possibile riscontrare una piccola differenza nell'evoluzione delle perturbazioni primordiali nell'Universo in espansione, a regimi di gravità estremamente debole, a seconda che la materia oscura sia composta di particelle classiche o di Fermioni.

Per trattare anche soltanto a livello introduttivo questi argomenti, si investono temi di cosmologia e di fisica quantistica dall'orizzonte necessariamente più ampio di quello che ci prefiggiamo.

Questo articolo è dunque da considerarsi come un invito all'Astrofisica Relativistica in generale, sia nel suo dominio degli oggetti collassati, di cui i buchi neri occupano lo stadio finale, che in quello della cosmologia primordiale, di cui il big bang costituisce lo stadio iniziale.

Nell'anno dedicato alla Fisica, ad un secolo dalla prima introduzione della Relatività Speciale (1905) da parte di Einstein, l'UAI ha voluto sottolineare questo evento bandendo il concorso "Una Stella sul Diploma" per i maturandi, esclusivamente su temi di Astrofisica Relativistica in collaborazione con l'ICRA; al congresso nazionale 2005 di La Spezia una sezione speciale è stata inoltre dedicata a questi argomenti.

2. Fermioni: spazio delle fasi, statistica quantistica e statistica classica

A causa del principio di esclusione di Pauli, due particelle quantistiche come gli elettroni non possono sussistere nella stessa cella dello spazio delle fasi contemporaneamente.

Nell'atomo 4 numeri quantici descrivono completamente lo stato di un elettrone: n , l , m ed s . Sul primo orbitale $n=1$, $l=0$, $m=0$ ed il numero di spin s può essere $+\frac{1}{2}$ oppure $-\frac{1}{2}$. Non possono convivere nel primo orbitale due elettroni con lo stesso numero di spin, ciò violerebbe il principio di esclusione. L'atomo di Elio, con due elettroni che saturano il primo orbitale, ha per l'appunto quei due elettroni con spin opposto.

2.1 Spazio delle fasi a sei dimensioni

Possiamo dire che il primo orbitale contempla due celle dello spazio delle fasi: quella con spin

su quella con spin giù. Tutta la chimica è basata sul fatto che all'aumentare degli elettroni negli atomi e nelle molecole, questi orbitali si riempiono sempre in ossequio al principio di esclusione, dando luogo ad atomi con proprietà differenti in ragione delle diverse composizioni degli orbitali più esterni.

Per l'atomo di Idrogeno, l'energia di ionizzazione è $E=13.6$ eV e corrisponde ad una temperatura di circa 100000 K data dall'equazione $3kT/2=E$.

In generale possiamo considerare lo spazio delle fasi in modo indipendente dagli stati quantici atomici, come uno spazio a sei dimensioni in cui ognuna delle dimensioni in gioco è rappresentata da una coordinata spaziale o di velocità. Uno stato è identificato dalla sua posizione in questo spazio esadimensionale e quindi sarà specificato fornendo 3 coordinate spaziali (x,y,z) e tre coordinate (p_x, p_y, p_z) legate alla velocità (si usa al posto della velocità il momento $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$). In tutto abbiamo un set di 6 numeri per identificare lo stato di una particella.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg stabilisce che non si può conoscere con infinita precisione contemporaneamente posizione e velocità di una particella quantistica, quindi ciò che si può dire di una particella è che questa occupa un volumetto nello spazio delle fasi, determinato proprio dal prodotto di indeterminazione $\Delta x \cdot \Delta p_x \cdot \Delta y \cdot \Delta p_y \cdot \Delta z \cdot \Delta p_z = h^3$, dove h è la costante di Planck. Al di sotto di questa risoluzione non si può dunque andare, nel mondo quantistico.

Queste particelle, che non possono coesistere nella medesima cella esadimensionale di esavolume h^3 , sono chiamate Fermioni in onore ad Enrico Fermi che ne studiò per primo la statistica microscopica.

Ci si potrebbe chiedere come mai per gli elettroni legati nell'atomo ci servono solo 4 coordinate mentre fuori, per gli elettroni liberi, ce ne vogliono 6 per rappresentare la stessa cosa? L'atomo viene tradizionalmente studiato nel sistema di riferimento del suo centro di massa trascurandone il moto di traslazione che ha già di per sé 3 gradi di libertà spaziali e 3 di velocità. Quando si applica un vincolo ad un sistema (ad esempio che gli elettroni appartengano all'atomo), i gradi di libertà, cioè il numero di parametri liberi di variare indipendentemente, diminuiscono.

2.2 Statistica quantistica e classica

Immaginiamo uno spazio delle fasi composto da due soli stati A e B.

Avendo 2 particelle classiche, delle quali cioè posso distinguere le singole parti costitutive (pensiamo ad una pallina su cui posso scrivere un numero sopra e così distinguerla da un'altra) potremmo disporre queste particelle -che chiameremo p_1 e p_2 - nei seguenti modi:

- 1) in A $p_1 p_2$ ed in B 0
- 2) in A p_1 ed in B p_2
- 3) in A p_2 ed in B p_1
- 4) in A 0 ed in B $p_1 p_2$.

In tutto 4 modi diversi. Le particelle classiche sono distinguibili.

Avendo invece particelle quantistiche, esse saranno indistinguibili tra loro, perché elementari. Se poi sono anche Fermioni, queste non potranno occupare lo stesso stato contemporaneamente, quindi avremmo una sola combinazione possibile:

- 1) in A p_1 (o p_2) ed in B p_2 (o p_1)

ricordando che stavolta scrivere p_1 e p_2 non ha più senso data l'indistinguibilità, scriveremo meglio per i Fermioni:

- 1) in A p ed in B p.

Se le particelle sono invece Bosoni (che possono coesistere nella stessa cella elementare dello spazio delle fasi) avremmo 3 stati:

- 1) in A pp ed in B 0
- 2) in A 0 ed in B pp
- 3) in A p ed in B p

Come si vede in questo esempio semplicissimo le tre statistiche hanno comportamenti differenti, che danno luogo a 4 diverse configurazioni nel caso della statistica classica, 3 per i Bosoni (statistica di Bose-Einstein) ed una sola per i Fermioni (statistica di Fermi).

Per quanto detto, particelle classiche e Bosoni possono condensare, mentre i Fermioni mantengono le distanze, anche allo zero assoluto, conservando sempre almeno l'energia di Fermi.

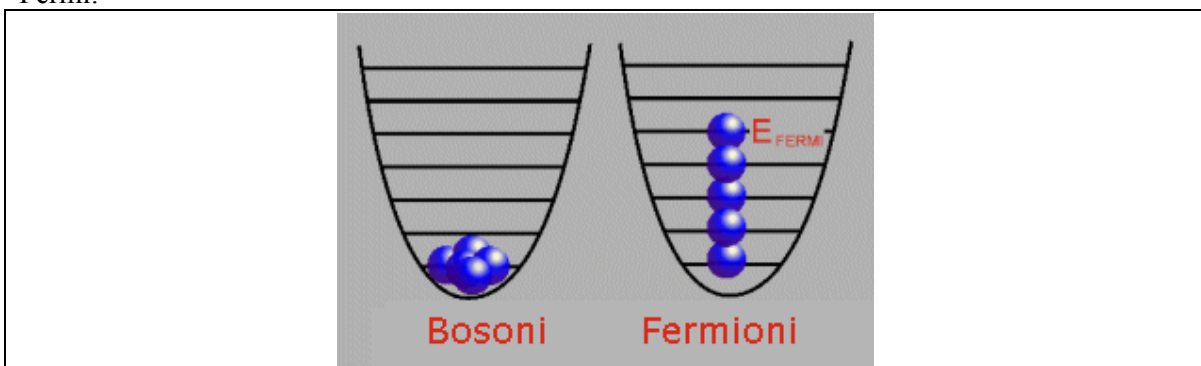
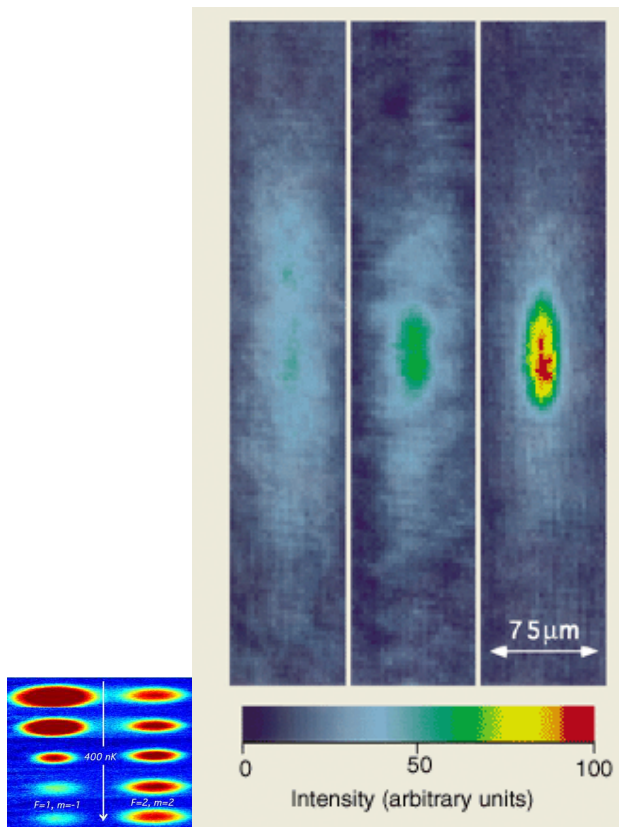


Figura 1. La buca di potenziale in cui si trovano le particelle è parabolica.

I diversi livelli sono gli stati quantici possibili. I Fermioni li riempiono uno alla volta, mentre ai Bosoni è consentito riempirli anche insieme. Al di sotto della temperatura di condensazione, tutti i Bosoni possono andare ad occupare lo stesso stato quantico, mentre ciò non accade mai per i Fermioni.



3. La cella dello spazio delle fasi nell'Universo in espansione

Una particella elementare occupa in un dato istante una celletta dello spazio delle fasi, ma ne può uscire nell'istante successivo perché muta una sua coordinata spaziale o di velocità (d'impulso). Se però l'Universo si espande nelle sue coordinate spaziali, ogni celletta dello spazio delle fasi subirà la medesima espansione. Poiché il volume deve rimanere h^3 , saranno le coordinate legate alla velocità a sacrificarsi a vantaggio di quelle spaziali. Le Δx aumentano e le Δv diminuiscono, in modo da mantenere il loro prodotto costante.

Questa è un'argomentazione molto diretta e semplice per capire che l'Universo espandendosi si raffredda. Velocità e temperatura sono infatti grandezze microscopicamente legate dalle equazioni relativistiche $E=cp$, dove c è la velocità della luce e p il modulo del momento, ed $E=3kT$ da cui dunque si ricava $T=cp/k$. Od anche dall'equazione non relativistica $E=p^2/2m$ e la stessa $E=3kT/2$ per ottenere $T=p^2/3mk$.

3.1 Equazioni di stato relativistiche e non relativistiche

Ci si trova nel regime relativistico quando le velocità si avvicinano a c , che è la velocità della luce. I fotoni ubbidiscono sempre all'equazione di stato relativistica $E=cp$.

Una particella classica, lontana da velocità relativistiche, ubbidisce piuttosto all'equazione classica $E=p^2/2m$, che non è altro della consueta forma dell'energia cinetica $E=1/2mv^2$ essendo $p=mv$.

Dall'equazione che lega energia E e temperatura T $E=3kT/2$ possiamo definire, nella storia cinetica dell'Universo, per ogni tipo di particella di massa data m , una temperatura T di transizione tra la fase relativistica e quella non relativistica. Quando cioè la temperatura T scende ad un livello tale che l'energia corrisponde alla massa a riposo, m_0 , di quella data particella, secondo la nota equazione di Einstein $E=m_0c^2$. I fotoni che sono di massa nulla, restano relativistici a qualunque temperatura.

In termini pratici cosa significa che una particella passa dal regime relativistico a quello non relativistico? Dall'equazione di stato si vede che l'energia di una particella non relativistica cresce in regime classico col quadrato dell'impulso \mathbf{p} (o momento), mentre la crescita diventa

lineare con l'impulso in regime relativistico. Poiché gli andamenti si raccordano nel punto di transizione dobbiamo immaginarci una parabola raccordata con una retta là dove $E=m_0c^2$. L'impulso di una forza è legato direttamente alla quantità di moto dal teorema di Newton $F \cdot \Delta t = \Delta p$. Applicando, dunque, una forza costante ad una particella questa aumenta la sua energia in modo diverso se si trova nel regime classico a basse velocità o relativistico. La sua velocità cresce in modo da avvicinarsi asintoticamente alla velocità della luce c .

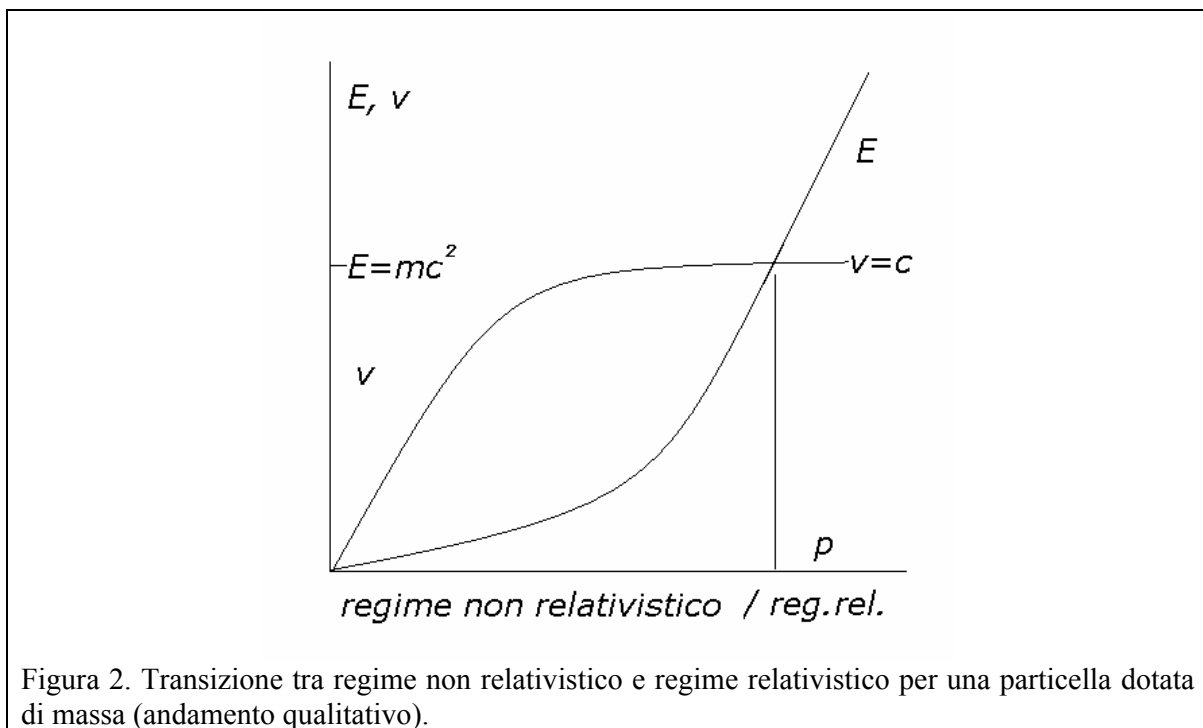


Figura 2. Transizione tra regime non relativistico e regime relativistico per una particella dotata di massa (andamento qualitativo).

Se ci spostiamo dal regime relativistico a quello non relativistico, come è accaduto nella storia cinetica e termica dell'Universo, vediamo che nel raffreddamento, l'impulso diminuisce più velocemente nel caso non relativistico, per il quale $p = \sqrt{2mE}$, che in quello relativistico dove $p = E/c$, si comporterà di conseguenza anche la velocità delle particelle.

FORMULA $v=v(p)$ e FIGURE E vs p e p vs E.

In pratica con il raffreddamento dell'Universo dovuto all'espansione, se questa avviene a velocità costante, consegue un rallentamento delle particelle che diventano non relativistiche in misura maggiore a quella che si avrebbe se non ci fosse la transizione relativistico-classica.

3.2 Teorema di Liouville nell'Universo in espansione

Per una particella non relativistica, uscire dalla propria cella dello spazio delle fasi diventa sempre più difficile man mano che l'Universo si espande.

L'estensione del teorema di Liouville nell'Universo in espansione è dovuto ad Ehlers ed afferma che se un insieme di particelle ha una distribuzione statistica di tipo relativistico -quindi determinata da velocità prossime a quella della luce- come un insieme di Fermioni dotati di energia di Fermi molto superiore alla loro energia a riposo $E=m_0c^2$ -, questa distribuzione si mantiene invariata **se la transizione tra regime relativistico e non relativistico è avvenuta abbastanza tardi** -vedremo in seguito cosa significa questo "tardi"-, con la conseguenza che particelle non più relativistiche si trovano a seguire una funzione di distribuzione contenente un'equazione di stato ancora relativistica.

Il teorema di Liouville in Cosmologia è governato dalla competizione tra l'espansione dell'Universo ed il tasso di interazione (urti) tra le particelle. Infatti sono gli urti a determinare una modifica della distribuzione di un insieme di particelle. Quando l'Universo si espande, la temperatura e quindi la velocità di ogni particella diminuisce, ma l'insieme delle particelle conserva, in assenza di urti, una distribuzione statistica come se fosse composto di particelle ancora relativistiche.

Particelle con massa piccola hanno temperature (energie) di transizione al regime non relativistico più basse, visto che $E=mc^2$. Quindi nel caso di neutrini, Fermioni di piccola massa, la transizione al regime non relativistico è avvenuta quando già l'espansione dell'Universo era ben avanzata e gli urti tra neutrino e neutrino già molto rari. Oggi i neutrini sono ad 1.9 K di temperatura, appena più freddi dei fotoni del fondo cosmico che sono a 2.7 K, ma la loro distribuzione statistica è rimasta relativistica come si vede nell'argomento dell'esponentiale della funzione di distribuzione di Fermi, dove compare $E=cp$.

$$\langle n \rangle = \frac{1}{1 + e^{\frac{cp}{KT}}}$$

4. Formazione di Strutture: competizione tra gravità ed espansione

La velocità di espansione dell'Universo non è sempre la stessa dal Big Bang in poi.

L'espansione nelle prime fasi, fino praticamente ad oggi, rallenta sempre, ma questo rallentamento è più rapido all'inizio, nella cosiddetta "era della radiazione", mentre diminuisce nell'"era della materia".

Una nuova accelerazione è prevista nell'"era dell'energia oscura", ma andiamo con ordine: i fotoni sono Bosoni, e possono occupare lo stesso stato quantico. Si può dimostrare che la loro densità è proporzionale alla quarta potenza della temperatura (o dell'energia che è la stessa cosa, è riconducibile alla legge di Stefan Boltzmann del corpo nero).

Raffreddandosi l'Universo la densità dei fotoni diventa –ad un certo momento- inferiore a quella della materia che invece è proporzionale al cubo della temperatura, e quindi decresce più lentamente. Questo significa che al principio, nell'era della radiazione, l'espansione era più rapida perché era contrastata da una densità di materia-energia gravitante che decresceva più velocemente. Successivamente nell'era della materia la densità dell'Universo decresceva più lentamente contrastando di più l'espansione che rallentò maggiormente il suo ritmo.

Questo cambio di velocità nell'espansione dell'Universo ha determinato delle condizioni differenti per la crescita di perturbazioni di densità autogravitanti. Se nell'era della radiazione queste perturbazioni erano "congelate", nell'era della materia con il rallentamento dell'espansione dell'Universo queste perturbazioni possono cominciare il loro lento collasso gravitazionale. Questa fase di congelamento è nota come effetto Meszaros.

Per immaginare questa situazione può essere utile pensare a due persone di cui una sta su un tapis roulant: due persone reciprocamente attratte camminano una verso l'altra, ma la velocità del tapis roulant è in senso opposto al moto; se è troppo veloce le due persone non si avvicinano anzi tendono ad allontanarsi, se il tapis roulant (che fa le veci dell'espansione cosmologica) rallenta allora le due persone iniziano ad avvicinarsi.

Una perturbazione di densità, infine, è una regione di spazio dove la densità è leggermente superiore alla media. Queste regioni presenti fin dall'inizio per cause quantistiche, sono i progenitori delle strutture a larga scala che vediamo oggi (filamenti, superammassi...).

5. Formazioni di Strutture: il ruolo della statistica microscopica

Cominciamo dalla massa delle particelle. Particelle più massicce diventano non relativistiche in epoche più calde, e quindi più remote dal presente.

Una convenzione sancisce in 500 eV la massa discriminante tra la materia oscura fredda (masse maggiori) e quella calda (masse minori). Materia fredda significa che a parità di epoca cosmologica, poiché sono particelle già non relativistiche, esse viaggiano più lente delle loro colleghe ancora relativistiche. Materia oscura perché non interagisce elettromagneticamente, ma solo mediante la gravità o l'interazione debole (come fanno i neutrini).

5.1 Materia Oscura

Si parla di materia oscura nell'Universo, sia a livello locale, per spiegare le curve di rotazione delle galassie [1] o degli ammassi di galassie [2] (Zwicky, 1931), sia a livello cosmologico (cfr. es. Sigismondi, 2004) per spiegare l'avvenuto collasso gravitazionale di strutture entro il tempo presente a partire da perturbazioni di densità visibili ad altissimo redshift, $z=1000$, almeno cento volte più piccoli del necessario.

Se la materia oscura è fredda, per autogravitare sono necessarie masse relativamente piccole (dell'ordine degli ammassi stellari, $100000 M_{\odot}$). Nel caso di materia oscura calda composta da neutrini di qualche eV di massa, occorrono 10^{18} - 10^{18} masse solari per tenere insieme la struttura. E' come nel caso delle atmosfere dei pianeti: pianeti più massicci riescono a trattenere l'Idrogeno, che è l'elemento più leggero, il quale invece sfugge ai pianeti più leggeri come Mercurio e Marte. Mentre l'Anidride Carbonica che pesa 44 volte l'Idrogeno è trattenuta anche da Marte. Su Giove l'Idrogeno resta ben contenuto nell'atmosfera.

5.2 Scenari di formazione top-down e bottom-up

Per avere oggi le galassie, se partiamo da materia oscura fredda, che formerebbe spontaneamente strutture autogravitanti già delle dimensioni degli ammassi globulari, occorre far convergere insieme molte di queste strutture, chiamate "building blocks": questo scenario di formazione si chiama "bottom-up" cioè dalle piccole strutture si compongono le più grandi.

Viceversa in presenza di materia oscura calda le strutture autogravitanti si formano molto tardi e sono enormi, per cui devono frammentarsi per dar luogo alle galassie: è questo lo scenario "top-down".

La ragione del ritardo sulla formazione delle strutture di materia oscura calda sta proprio nella competizione tra autogravitazione ed espansione, del tutto a svantaggio della prima nell'era della radiazione.

L'agitazione termica delle particelle, favorita poi nel caso si tratti di Fermioni dall'energia di Fermi, si oppone già di per sé al collasso gravitazionale, in concomitanza per giunta con l'espansione cosmologica. L'agitazione di origine termica e quantistica si chiama "free streaming" e come dice il termine inglese tende a far fluire liberamente le particelle, via dal loro campo gravitazionale comune.

La differenza tra Fermioni e particelle classiche, in regime di campi gravitazionali molto deboli quali quelli che si instaurano in regioni di densità superiore alla media di una parte su mille, sta in una incidenza maggiore del free streaming per i Fermioni rispetto alle particelle classiche (si veda anche Sigismondi, 2003).

6. Fermioni in campi gravitazionali deboli e forti

Lo spazio delle fasi viene riempito in una zona piuttosto limitata delle coordinate spaziali, quindi possiamo considerare il riempimento progressivo delle coordinate di velocità per calcolare l'energia di Fermi. Tale energia è proporzionale alla radice cubica del numero N di Fermioni che compongono la struttura, dovendo essi disporsi ordinatamente su una sfera tridimensionale di coordinate dei momenti.

Nel caso di campi deboli, invece, lo spazio delle fasi viene riempito dalla parte delle coordinate spaziali, in quanto anche una piccola velocità farebbe sfuggire la particella dalla regione in via di collasso gravitazionale. Quindi le dimensioni della struttura dipendono dal numero N di Fermioni, proporzionale alla radice cubica di N .

6.1 Ruolo dell'espansione cosmologica

Un uomo, il sistema solare e persino la galassia non sono soggetti all'espansione cosmologica.

Le condizioni per cui si possa parlare di espansione cosmologica su una struttura autogravitante sono verificate quando la velocità di espansione dell'Universo è superiore alla velocità di collasso autogravitazionale.

In caso di strutture tenute assieme da forze diverse dalla gravità (elettliche ad esempio come nel caso di un solido, del corpo umano...) di espansione non se parla neppure.

[1] Townsend, C. , W. Ketterle, S. Stringari, La condensazione di Bose Einstein, Quaderni delle Scienze n. 112 p. 50 Physics World 10 n. 3, Marzo 1997