

**Costantino Sigismondi**

**(Università degli Studi di Roma “La Sapienza” e ICRA,  
*International Center for Relativistic Astrophysics*)**

# **La formazione delle strutture a larga scala nell’universo**

## **Sommario**

1. Il problema della materia oscura in cosmologia pag. 2
2. Il problema del *free streaming* in cosmologia con neutrini (*Hot Dark Matter*) pag. 3
3. La teoria “classica” della formazione delle strutture a larga scala: i modelli CDM e HDM pag. 6
4. Il modello di universo a celle frattali e il ruolo del *free streaming* in presenza di neutrini pag. 13

## **1. Il problema della materia oscura in cosmologia**

I dati sperimentali dell'osservazione dell'universo, assieme a nozioni di struttura stellare e di teoria della gravitazione (non necessariamente relativistica) permettono di provare l'esistenza di materia oscura come materiale dominante nel cosmo<sup>1</sup>.

Considerando i dati sperimentali nell'ambito delle moderne teorie cosmologiche e facendo uso di risultati di fisica nucleare si deduce che la materia oscura è in gran parte (> 90 %) non barionica.

Dato che la materia oscura deve rendere ragione sia

1) della massa gravitazionale degli oggetti dell'universo (che per l'appunto risulta di gran lunga superiore a quella della materia luminosa osservata), sia

2) della formazione delle strutture compatibilmente con una radiazione di fondo cosmico omogenea entro  $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ (<sup>2</sup>), sia

3) del fatto che nessuna rilevazione diretta delle particelle che la costituiscono è stata ancora fatta a tutt'oggi,

la materia oscura è costituita da particelle massive debolmente interagenti con la materia ordinaria che dalle corrispondenti parole inglesi si indica con l'acronimo *wimp*, weak interacting massive particles.

I *wimp* non sono osservabili elettromagneticamente, ma solo dall'effetto gravitazionale che producono, pertanto soddisfano alla prima condizione. Si distingue tra materia oscura calda e materia oscura fredda,

---

<sup>1</sup> Silvio Bonometto, "Materia Oscura" in Enciclopedia delle scienze fisiche, volume III, pag. 442-445, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma, 1994.

<sup>2</sup> Roberto Scaramella, "Struttura su grande scala dell'universo" in Enciclopedia delle scienze fisiche, volume VI, pag. 436-445, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma, 1995

non per riferirsi ad una temperatura della materia oscura nell'epoca attuale, ma all'energia media dei *wimp* nell'epoca cosmologica in cui la massa contenuta nell'orizzonte causale<sup>3</sup> era dell'ordine della massa di una galassia ( $M_{Gal} \approx 10^{10-12} M_{Sole}$ ). A quest'epoca il fattore di scala era  $a \approx 10^{-5} a_{oggi}$  (ovvero l'universo era più piccolo di oggi di un fattore  $a \approx 10^{-5} a_{oggi}$ ). Se la distribuzione energetica era di origine termica, *wimp* con massa maggiore oppure minore di 500 eV davano luogo a materia oscura fredda oppure calda. Non entrando nel merito di distribuzioni non termiche (caso degli assioni) si considera qui solo la materia oscura calda composta da neutrini.

## 2. Il problema del *free streaming* in cosmologia con neutrini (*Hot Dark Matter*)

La lunghezza d'onda e la massa di *free streaming* si ricavano calcolando la distanza che una particella, animata da una velocità peculiare che varia col red shift  $z$  secondo le usuali leggi di scaling cosmologiche, ha percorso fino ad un determinato tempo  $t$ , legato anch'esso al red shift  $z$ .

Ricordando<sup>4</sup> che  $z_{n.r.} \approx 2 \cdot 10^4 \left( \frac{m_\nu}{10 \text{ eV}} \right)^{-1}$  e assumendo per semplicità che a

tale valore del red shift corrisponda la transizione tra la legge  $\langle v^2 \rangle^{1/2} \approx 18 m_{10\text{eV}}^{-1} (1+z) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  e  $v \sim c$ ,

---

<sup>3</sup> L'orizzonte causale (da qui in poi chiamato semplicemente "orizzonte") è la regione di spazio connessa causalmente, cioè almeno da un raggio di luce. Si può immaginare come una sfera il cui raggio si espande con la legge  $r=ct$ , anche se quest'ultimo è solitamente definito come il raggio di Hubble (o raggio dell'universo visibile) e vale oggi circa 3000 Mpc.

<sup>4</sup> J. R. Bond, G. Efstathiou e J. Silk, Physical Review Letters, 45, 1980 pag. 1980.

si ha che

$$\lambda_{f.s.} = \int_0^t \langle v \rangle_{t'} dt'$$

dove

$$\langle v \rangle_t = \frac{\int_0^\infty dv v^2 v(z(t)) \cdot f}{\int_0^\infty dv v^2 \cdot f},$$

$f$  è la funzione di distribuzione di Fermi - Dirac e

$v(z(t))$  è la velocità corrispondente al red shift  $z$ , data dalla legge composta precedente.

La lunghezza e quindi anche la massa di *free streaming* crescono come la lunghezza e la massa dell'orizzonte finché i neutrini sono relativistici

Il red shift in cui i neutrini diventano non relativistici si può ricavare come fanno

Bond et al. (1980) dalla formula

$$\frac{3kT_0(1+z_{NR})}{2} = \frac{1}{2}m_\nu c^2, \text{ dove } T_0 = 1.9K \text{ è la temperatura dei neutrini (si veda}$$

anche Steven Weinberg, "I primi tre minuti", Mondadori, 1977) e  $z_{NR} \approx 2 \cdot 10^4 m_{10}$  dove  $m_{10} = m_\nu / 10eV$ .

Dopo quell'istante la dispersione di velocità, tenendo conto di tutti i fattori numerici dovuti all'uso della funzione di distribuzione di Fermi Dirac di equilibrio (che i neutrini conserveranno per tutta la loro storia, visto che non avranno più interazioni essendo disaccoppiati sia dalla radiazione che dalla materia ordinaria), e tenendo conto della legge con cui varia la velocità peculiare in cosmologia ( $v \propto z+1$ ) è data da (Bond et al. 1980)

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = (12\eta(5)/\eta(3))^{1/2} \frac{kT_\nu}{m_\nu c} \cdot (1+z) \approx 18m_{10}^{-1}(1+z)km \cdot s^{-1}$$

(figura 1<sup>5</sup> e 2<sup>6</sup>), fino ad un valore massimo che è poi anche quello asintotico:  $\lambda_{f.s.} \approx 40 Mpc \left( \frac{m_\nu}{30 \text{ eV}} \right)^{-1}$  e  $M_{f.s.} \approx 3 \cdot 10^{15} M_{Sole} \left( \frac{m_\nu}{30 \text{ eV}} \right)^{-2}$ <sup>7</sup>.

Per confrontare l'andamento della curva della massa di *free streaming* (che coincide fino a  $z_{non\ rel.}$  con quella dell'orizzonte) con quello della massa di Jeans presenti nelle figure 1 e 2 si tenga presente che durante l'era della radiazione vale la relazione<sup>8</sup>:

$$t^2 = \frac{3}{32 \pi G \rho_{univ.}}$$

Poiché  $M_{orizz.} = \rho_{univ.} \frac{4\pi}{3} (ct)^3$  e  $M_J = \rho_{univ.} \frac{4\pi}{3} (R_J)^3$ , valutando la metà

della lunghezza di Jeans dall'equazione  $\frac{1}{2} m \frac{c^2}{3} = \frac{G \frac{4\pi}{3} \rho_{univ.} R^3}{R}$  (in cui si è

calcolato il raggio a cui una particella, animata dalla velocità del suono<sup>9</sup>, è in equilibrio con la forza di gravità determinata dalla massa contenuta all'interno di quel raggio), si ottiene il rapporto

<sup>5</sup> da Ruth Durrer, *Astronomy and Astrophysics*, 208, 1989, pag. 1-13.

<sup>6</sup> da J. R. Bond, G. Efstathiou e J. Silk, *ibidem*.

<sup>7</sup> La massa di *free streaming* risulta essere proprio la massa al di sotto della quale le perturbazioni di densità (che si estendono pertanto su scale inferiori alla lunghezza di *free streaming*) sarebbero cancellate dal moto proprio delle particelle che provoca una diffusione dalle alte alle basse densità.

<sup>8</sup> Francesco Lucchin, "Introduzione alla cosmologia", Zanichelli, Bologna, 1990.

<sup>9</sup> Nel caso dei neutrini (materia oscura "calda") poiché si stanno esaminando particelle non collisionali bisogna sostituire, nella formula della lunghezza di Jeans, alla velocità del suono la dispersione delle velocità  $v_s^2 = \langle v^2 \rangle / 3$ .

$$\frac{M_J}{M_{orizz.}} \Big|_{z > z_{n.r.}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} \approx 1.54.$$

Si vede che l'andamento della massa di Jeans e di quella dell'orizzonte è lo stesso nell'era della radiazione, fin quando i neutrini diventano non relativistici.

### 3. La teoria "classica" della formazione delle strutture a larga scala: i modelli CDM e HDM

Il problema principale per un modello cosmologico è come ottenere le strutture osservate oggi nell'universo a partire da una descrizione dello stesso spazialmente omogenea ed isotropa (modello di Friedmann). Lo studio delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo mostra che l'universo di Friedmann era un'ottima descrizione per alti redshift,  $z \geq 1000$ , quando  $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$ . Attraverso l'effetto Sachs-Wolfe si può risalire dalle fluttuazioni di temperatura nella radiazione di fondo, alle corrispondenti fluttuazioni di densità che le hanno originate: questo effetto può essere visto come un red shift gravitazionale<sup>10</sup>  $\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{h\Phi}{c^2}$  (dove  $\Phi$  è il potenziale per unità di massa della perturbazione) che la radiazione di fondo cosmico subisce nelle regioni sopra dense (o sotto dense) rispetto alla media.

Lo studio in teoria lineare è quanto mai giustificato dai bassi valori di  $\delta\rho/\rho$  che sono implicati dalle misure del satellite COBE (COsmic Background Explorer), esperimento DMR, sulle anisotropie della

---

<sup>10</sup> P.J.E. Peebles, "Principles of physical cosmology", Princeton University Press, Princeton NJ, 1993.

distribuzione di temperatura del fondo cosmico<sup>11</sup> e dai più recenti esperimenti su scale angolari dell'ordine del grado<sup>12</sup>.

Un grande ostacolo alla crescita di strutture è dato dall'espansione dell'universo che ostacola ed a volte impedisce i collassi di materia; la *free streaming* gioca anche il suo ruolo nel caso in cui le particelle che costituiscono le regioni perturbate siano animate da una certa velocità peculiare.

I soli barioni, ancora accoppiati con la radiazione al momento della formazione della radiazione cosmica di fondo, non possono rendere ragione della formazione dell'attuale struttura a larga scala dell'universo, poiché  $\delta\rho_B / \rho_B \approx 10^{-4}$  (che è il valore massimo consentito dai valori osservati di  $\Delta T/T$  della radiazione di fondo cosmico<sup>13</sup>) nel regime di

---

<sup>11</sup> M. White, D. Scott e J. Silk, "Anisotropies in the cosmic microwave background", Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics, Vol. 32, pag. 319-370, 1994.

<sup>12</sup> Paolo De Bernardis, et al., in <http://babbarge.sissa.it> archivio elettronico "babbarge", articolo astro-ph/9609154, 1996.

<sup>13</sup> Infatti i barioni finché non si disaccoppiano dalla radiazione, a cui sono legati dallo scattering Thomson, non possono dar luogo alla crescita di buche di potenziale, e se ci sono delle perturbazioni di densità barioniche, a causa del loro accoppiamento con i fotoni, esse oscillano con la velocità del suono. Questa oscillazione è riportata graficamente anche nella figura 6, e se i barioni fossero più abbondanti del 25% l'oscillazione si trasmetterebbe anche alla materia oscura (non più dominante) e quindi ciò si ripercuoterebbe nella radiazione di fondo cosmico in cui un "doppler shift"  $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{v_{suono}}{c} \approx 10^{-3} \gg 10^{-5}$  diventerebbe il primo responsabile delle anisotropie di fondo cosmico. Ma questi ultimi valori sono molto maggiori di quelli osservati, escludendo così la possibilità che l'universo sia dominato da barioni. Peebles (ibidem)

crescita lineare  $\delta \propto a$  (avendo indicato con  $\delta$  la perturbazione di densità), per cui si ha a disposizione troppo poco tempo (soltanto un fattore 1000 di incremento del fattore di scala) per giungere alla fase in cui inizia la fase non lineare (dove  $\delta\rho_B / \rho_B \approx 1$ ).

Infatti dal disaccoppiamento della radiazione dalla materia ad oggi il fattore di scala  $a$  è aumentato solo di un fattore 1000, il che darebbe oggi un valore  $\delta\rho_B / \rho_B \approx 10^{-1}$ .

E' necessario avere dei *wimp* che non interagiscano con la radiazione già da prima del disaccoppiamento della materia ordinaria dalla radiazione, affinché la materia barionica una volta disaccoppiata trovi già pronte le buche di potenziale in cui cadere: quelle create dai *wimp*. In

---

introduce un modello di *isocurvatura* in cui i barioni giocherebbero ancora un ruolo centrale, ma ha il sapore di un'ipotesi *ad hoc*, e come tutte le teorie troppo aderenti ai dati rischia di essere rapidamente falsificata poiché in una data epoca non tutti i dati sono esatti (da Michael S. Turner, "The hot big bang and beyond", <http://babbage.sissa.it/astro-ph/9503017>, pag. 17, 1995). Si consideri, infine, che l'entità del *doppler shift* non dipende dall'abbondanza di barioni rispetto alla materia oscura, bensì solo dalla velocità del suono dei barioni, ma la sua incidenza su scale dell'ordine del grado e più sulla radiazione di fondo cosmico dipende proprio dall'abbondanza dei barioni e dalla loro influenza sulla materia oscura: perturbazioni di densità di barioni grandi rispetto a quelle della materia oscura sarebbero possibili solo su scale limitate (se i barioni sono meno del 10% dell'intera massa dell'universo), a causa di quelle perturbazioni di densità barioniche si dovrebbero osservare tracce, mediante il *doppler shift*, su scale molto più piccole del grado, ma queste sono state cancellate dai processi di reionizzazione del mezzo interstellare occorsi dopo il disaccoppiamento (ad esempio dopo i primi processi di formazione stellare).

queste buche i barioni finché non sono disaccoppiati dalla radiazione non possono cadervi dentro, perché la loro massa di Jeans è grande<sup>14</sup> (figura 3<sup>15</sup>), come grande è l'accoppiamento con la radiazione attraverso lo scattering Thomson, che determina anche il damping di Silk (figura 4<sup>16</sup>).

La bassa efficienza della formazione gravitazionale di strutture nel regime lineare, si riflette nella necessità di tempi lunghi perché il collasso possa avere luogo, nell'impossibilità di avere notevoli perturbazioni primordiali di densità (che sono limitate dai dati osservativi sulle anisotropie della radiazione di fondo cosmico).

In ultimo occorre tenere presente che la crescita di perturbazioni nel regime lineare, a causa degli effetti di curvatura dello spazio che ad alti redshift non contano, praticamente ha termine per  $z \leq 1/\Omega$ .

Perturbazioni di grandissima lunghezza d'onda, maggiore di quella dell'orizzonte causale crescono sempre con  $\delta \approx a^2 \approx t$  nell'era della radiazione e con  $\delta \approx a \approx t^{2/3}$  nell'era della materia, per perturbazioni di lunghezza d'onda minore dell'orizzonte queste sono soggette a processi causali ed il loro comportamento diviene diverso a seconda che si tratti di materia oscura fredda o calda.

Nel caso che non ci sia *free streaming* (CDM) la crescita delle perturbazioni non può essere mai ostacolata e si ha la massima efficienza

---

<sup>14</sup> Steven Weinberg, "Gravitation and cosmology" John Wiley e Sons, New York, NY, 1972, pag. 565.

<sup>15</sup> da Remo Ruffini e D. J. Song, in "Proceedings of LXXXVI Course, International School of Varenna, 1987", pag. 370 e ss., 1987.

<sup>16</sup> da T. Padmanabhan, "Structure formation in the universe", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.

di crescita, tuttavia se la  $\lambda < \lambda_{orizzonte}(z_{eq})$ , cioè la perturbazione "entra" nell'orizzonte causale prima dell'era in cui nell'universo domina la densità della materia, questa cresce pochissimo (resta "congelata") fino all'epoca dell'equivalenza tra densità di materia e della radiazione  $z_{equidens.} \approx 4 \cdot 10^4 \Omega h^2$  poiché il tempo di caduta libera (tempo tipico dell'interazione gravitazionale) è molto maggiore di quello di espansione nell'era dominata dalla radiazione (Effetto Meszaros, figura 5<sup>17</sup>).

Questa particolare lunghezza d'onda oggi vale  $\lambda_{orizzonte}(z_{eq}) \approx 13(h^2 \Omega)^{-1} Mpc$  e vi corrisponde una massa tipica di un ammasso di galassie:  $M_{orizzonte}(z_{eq}) \approx 10^{15} M_{Sole}$ .

La figura 5 mostra che partendo da uno spettro di potenza iniziale delle perturbazioni come quello di Zel'dovich ( $n=1$ , in cui le perturbazioni a tutte le scale hanno la stessa ampiezza), tutte le perturbazioni con  $\lambda < \lambda_{orizzonte}(z_{eq})$  hanno un fattore di crescita via via minore rispetto alle grandi lunghezze d'onda, ma queste ultime hanno poco tempo per divenire non lineari e dar luogo a formazione di strutture: quindi sono solo quelle con  $\lambda < \lambda_{orizzonte}(z_{eq})$  che possono arrivare al collasso non lineare entro oggi.

Questo è proprio il caso della "materia oscura fredda" CDM, che non subisce *free streaming* in perturbazioni di  $\lambda < \lambda_{f.s.}$ .

Lo scenario CDM favorisce la formazione di oggetti su tutte le scale e, cominciando da quelle più piccole, si arriva, per aggregazione gravitazionale successiva, a formare strutture via via sempre più grandi (scenario *gerarchico* o *bottom-up*).  $M_{orizzonte}(z_{eq}) \approx 10^{15} M_{Sole}$ , rappresenta un

---

<sup>17</sup> da J. R. Primack e G. R. Blumenthal, in "Clusters and groups of galaxies", F. Mardirossian et al. editori, D. Reidel Publishing Company, pag. 453, 1984.

limite superiore alle strutture che si formano direttamente per collasso non lineare: le strutture in uno scenario CDM sono composte da "*building blocks*", blocchi costitutivi di piccola massa, inferiore alla massa galattica<sup>18</sup>.

Quando c'è *free streaming* la massa limite, inferiore questa volta, è proprio quella di *free streaming*, dell'ordine di quella di un super ammasso di galassie (figura 6<sup>19</sup> e 7<sup>20</sup>) per neutrini ("hot dark matter" HDM) di  $m \sim 10 eV$ .

---

<sup>18</sup> Recentemente l'ipotesi di formazione di strutture mediante il processo "*bottom up*" ha trovato nell'interpretazione delle immagini dell'*Hubble Deep Field* un valido sostenitore: le piccole galassie osservate ad alto red shift dal Telescopio Spaziale sono state subito apostrofate come i "*building blocks*" delle galassie stesse. Questi *building blocks* dovrebbero essere, nell'ipotesi "*bottom up*" a base di soli barioni (alla cui idea si può legare l'origine del modello CDM), delle masse dell'ordine di  $10^5 M_{Sole}$  (la massa di un ammasso globulare), che è proprio il valore della massa di Jeans dei barioni dopo il disaccoppiamento (cfr. Steven Weinberg, "Gravitation and cosmology", John Wiley and Sons, New York, NY, 1972). Gli oggetti osservati, piuttosto che *building blocks* di massa pari agli ammassi globulari, dovrebbero essere le regioni centrali delle galassie, più luminose e con formazione stellare più attiva, in evidenza rispetto al resto del disco, dove facilmente la formazione stellare non è ancora cominciata (si veda Don Savage et al., "Hubble sees early building blocks of today galaxies", Space Telescope Science Institute - Press release 96-29, 1996).

<sup>19</sup> da T. Padmanabhan, *ibidem*.

<sup>20</sup> da T. Padmanabhan, *ibidem*.

I modelli HDM favoriscono scenari in cui prima si formano le strutture molto grandi e poi per frammentazione quelle più piccole, galassie comprese (scenario *discendente* o *top-down*).

La massa di *free streaming* impone che gli oggetti che si formano prima siano i super ammassi di galassie, mentre le galassie non si possono formare che per frammentazione successiva, ma non quando la massa di Jeans istantanea dell'universo lo permetterebbe (dacché il *free streaming* avrebbe cancellato tutte le perturbazioni di masse inferiori a  $M_{f.s.} \approx 2.7 \cdot 10^{16} M_{Sole} m_{10eV}^{-2}$ ), bensì quando il collasso non lineare del superammasso lo permette.

Il collasso non lineare può avere inizio quando la perturbazione di densità diventa  $\delta > \Omega^{-1} - 1$ <sup>21</sup>

I valori del red shift per cui la fase lineare può dirsi conclusa ed inizia il collasso non lineare sono tipicamente dell'ordine di  $z \geq 10$  ( $h_{100} = 1$ <sup>22</sup>) per i modelli CDM<sup>23</sup>, e solo  $z < 5$  ( $h_{100} = 1$ ) per quelli HDM<sup>24</sup>, limite che tende a ridursi ulteriormente con la diminuzione del valore della costante di Hubble oggi: se  $h_{100} = 0.5$  e  $\Omega_{Bar.} = 0.03 \Rightarrow z_{n.l.} > 3.5$ <sup>25</sup>.

Per i modesti valori del redshift a cui i modelli di materia oscura calda prevedono l'inizio della formazione delle galassie questi modelli sono

---

<sup>21</sup> Roberto Scaramella, *ibidem*, pag. 444.

<sup>22</sup> Con questa dicitura si intende che, nelle simulazioni e nei calcoli teorici, la costante di Hubble è presa esattamente uguale a  $100 \text{ Km/s/Mpc}$ .

<sup>23</sup> Nicola Vittorio e Joseph Silk, *Astrophysica Journal*, 285, 1984, pag. L39

<sup>24</sup> Yakov B. Zel'dovich e Rashid A. Sunyaev, *Astronomy and Astrophysics*, 20, 1972, pag. 189.

<sup>25</sup> J. R. Bond e G. Efstathiou, *Astrophysical Journal*, 285, 1984, pag. L45

stati gradualmente abbandonati <sup>26</sup>, e ciò trova un riscontro anche nei recenti dati osservativi del telescopio spaziale Hubble che mostrano evidenza osservativa dell'esistenza di galassie normali già a  $z=4.92$  <sup>27</sup>.

#### **4. Il modello di universo a celle frattali e il ruolo del *free streaming* in presenza di neutrini**

Il modello di universo a celle frattali è stato introdotto da Ruffini e collaboratori<sup>28</sup> per spiegare l'alta correlazione delle strutture su larga scala a partire da un processo di formazione "*top down*" governato dai neutrini, i più realistici candidati a materia oscura nell'universo (non fosse altro perché sono gli unici la cui esistenza è stata accertata sperimentalmente). Senza entrare nei dettagli del modello basti considerare che la struttura frattale si produce entro ogni singola cella mediante un processo di frammentazione successiva (che presuppone dunque l'esistenza di perturbazioni di densità più piccole della cella stessa e quindi che sopravvivano al *free streaming* classico). Le dimensioni caratteristiche della cella sono legate alle proprietà microscopiche dei neutrini (la massa, la statistica di Fermi Dirac), la possibilità di sopravvivere al *free streaming* è dovuta alla statistica: passando da quella classica (di Boltzmann) a quella totalmente degenere (caso delle stelle di neutroni) si può dimostrare come l'effetto del *free streaming* riesca a cancellare perturbazioni dalla lunghezza d'onda via via sempre più

---

<sup>26</sup> Michael S. Turner, *ibidem*, pag. 8

<sup>27</sup> Don Savage et al., *STScI Pr97-25*, 1997.

<sup>28</sup> Remo Ruffini, et al., *Astronomy and Astrophysics*, 232, 1990, pag. 7.

piccola rispetto a quella di Jeans. Per i neutrini, che sono “semidegeneri”, il *free streaming* risulta efficiente soltanto a partire da

$$\lambda_{f.s.} \leq \frac{\lambda_{Jeans}}{1.451}$$

per cui esiste tutta una regione permessa alle perturbazioni di densità, che così possono sopravvivere al *free streaming*<sup>29</sup>. Inoltre il modello a frammentazioni successive della cella prevede all’interno delle sottostrutture formate una crescita delle perturbazioni non lineare, poiché la crescita delle sottostrutture avviene in “sottouniversi” che hanno via via una velocità di espansione minore, quindi si considerano casi intermedi tra l’espansione lineare  $\delta \propto a$ , e quella esponenziale  $\delta \propto \exp(a)$ , che corrisponde all’universo statico.

Il numero 1.451 è una proprietà invariante di scala, dipende solo dal fatto che i neutrini seguono la statistica di Fermi Dirac semidegenere

$$f = \frac{1}{e^{\frac{E_\nu}{kT_\nu}} + 1}$$

ed è dunque possibile interpretare la struttura frattale proprio a partire da tale proprietà.

---

<sup>29</sup> Costantino Sigismondi, “Sulle perturbazioni di densità di fermioni non collisionali nell’universo in espansione”, Tesi di Dottorato in Fisica, Università “La Sapienza”, 1998.